2006年 東大数学 文系第3問

(1)

$x+y+z=xyz$ を満たし、$x \leqq y \leqq z$ となる (x,y,z) の組をもとめる。

整数問題の大方針は
- ・(積)=(整数) を作る
- ・不等式を作り絞り込み。

1. $x+y+z$ と $x \leqq y \leqq z$ より

$$x+x+x \leqq x+y+z \leqq z+z+z$$
$$3x \leqq x+y+z \leqq 3z$$

2. xyz と $x \leqq y \leqq z$ より

$$x\cdot x\cdot x \leqq xyz \leqq z\cdot z\cdot z$$
$$x^3 \leqq xyz \leqq z^3$$

の2つは、とてもよく使う方法

$xyz = x+y+z \leqq z+z+z = 3z$ より

$xyz \leqq 3z$

$xy \leqq 3$

これを満たす (x,y) は $(x,y)=(1,1)\ (1,2)\ (1,3)$ の3つ.

(i) $(x,y)=(1,1)$ のとき.

$1+1+z=1\times1\times z \qquad 2+z=z \qquad z$は解なし.

(ii) $(x,y)=(1,2)$ のとき.

$1+2+z=1\times2\times z \qquad 3+z=2z \qquad z=3$

(iii) $(x,y)=(1,3)$ のとき.

$1+3+z=1\times3\times z \qquad 4+z=3z \qquad z=2$

これは $y \leqq z$ に対し不適.

以上より $(x,y,z)=(1,2,3)$ //

(2) 解法1　$x^3+y^3+z^3$ ときたら、この公式.

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より.

$x^3+y^3+z^3=xyz$ に代入すると.

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=xyz$$
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=-2xyz$$

ここで、$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$　有名な変形

$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0$$

なので.

$$(x+y+z)\cdot\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=-2xyz$$

$x+y+z>0$, $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0$ なので.

(左辺) $\geqq 0$ であるが. (右辺) <0 なので.

(x,y,z) は解がない。 よって 証明された。

解法2　相加相乗の3文字バージョン

$x>0$, $y>0$, $z>0$ より. 相加平均と相乗平均 の関係を用い.

$x^3+y^3+z^3 \geqq 3\times\sqrt[3]{x^3\cdot y^3\cdot z^3}=3xyz$ なので.

$xyz \geqq 3xyz$ となり、矛盾。

よって ① を満たす (x,y,z) は存在しない。

解法3　不等式を作る。(1)と同様)

x,y,z の大小を $x \leqq y \leqq z$ としても、一般性を失わない。

$x^3+y^3+z^3=xyz \leqq z\cdot z\cdot z=z^3$ より.

$x^3+y^3+z^3 \leqq z^3$

$x^3+y^3 \leqq 0$

これを満たす 正の整数 (x,y) は存在しない。

よって ① を満たす (x,y,z) は存在しない。